第4章　モノの振動と波というコト

4.1　振動

雨上がりの木々に陽が射しこんで水滴が光っている。その1つが葉の先から落ちて葉がつかの間震えたように見えた。葉先の水滴の重みでしなっていた葉から水滴が落ちると、急に身軽になった葉に元の姿勢に戻ろうとする復元力が働いて、バネのように蓄えられていたエネルギーで一瞬振動するのだ。このように、たいていのモノは安定な位置にあり、外から何かの力が加わって安定な位置からずれると、元に戻ろうとして振動が生じる。

単振動

あなたが経験したことのあるバネの振動の例で考えてみよう。バネに重りをつけて手を離すと振動を始め、やがてエネルギーを失って静止する。静止しているときには、バネが縮まろうとする力が重りに働く重力とつりあっている。バネが縮まろうとする力の大きさは、重りをつけないときの自然長からの伸び l に比例し、バネの強さを k とすると $k\,l$ と書ける—ということをあなたは記憶しているだろう。重力を f_g と書き、つりあっているときの伸びを l_0 と書けば、力のつりあいの式は $k\,l_0 = f_g$ である。経験によれば、バネの振動は l_0 を中心に起こる。鉛直上向きに x 軸をとって、つりあいの位置を $x = 0$ にとろう。図4.1のように、つりあいの位置から上方 x の位置に重り

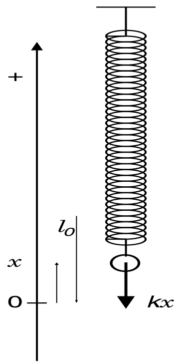

図 4.1: バネの振動.

があるとき、バネに働く力 F は $F = k(l_0 - x) - f_g = -kx$ となる。つりあいの位置から見ると、働く力 $F = -kx$ には重力が現われず、バネをなめらかな水平面に置いたときに等しい。つりあいの位置からバネが縮まれば伸びようとし、伸びれば縮まろうとする。重りの質量を m として運動方程式 (**??**) を書けば、

$$\text{バネの先の重りの運動方程式}\quad m\frac{d^2x}{dt^2} = -k\,x \tag{4.1}$$

が得られる。

この式がわれわれの観察するバネによる重りの振動を記述しているはずだ。微分方程式が出てきたけれどもたじろぐことはない。これを解けば運動方程式の醍醐味が味わえるのである。式を見やすくするために、$\omega^2 = k/m$ という書き換えをしよう。

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x, \quad (\omega = \sqrt{k/m}). \tag{4.2}$$

この式を言葉で言えば、時間 t の関数 x を t で 2 度微分すると元の関数 x にマイナス符号をつけた $-x$ に戻る、ただし定数 ω (オメガ) が 2 個現われる—というものだ。2 度微分したら符号だけ変わり元の形に戻る関数をあなたは知っているのではないか。そう、三角関数 $\sin t$ とか $\cos t$ である。ω が 2 個現われるが、それは t で 2 度微分して出てくるのだから、1 度の微分で ω が 1 個出るのだろう。そうすると、時間 t の前に定数 ω がかかっているのだ。だから、運動方程式 (4.2) を満足する x を、次のように sin の形に表わすことができる。

$$\text{振動の変位}\quad x = A\sin(\omega t + \theta_0), \tag{4.3}$$

sin 関数は $+1$ から -1 までの間で周期的に値を変えるから、(4.3) 式の x は、時間 t とともに $+A$ から $-A$ まで周期的に値を変え

ることが分かる。つまり、バネの先の重りは振動をするというわれわれの観察が説明できた。(4.3) 式で表わせる振動を**単振動**と呼ぶ。A は振動の振動幅 (**振幅**) を決める定数である。定数 θ_0 は、時刻 $t=0$ のときの重りの位置 $x_0 = A\sin\theta_0$ を決めている。

現実には、バネの振動の振幅 A はしだいに小さくなり、ついには静止する。一般に、量の減少率が今ある量に比例する場合、減少は指数関数的になる ($e^{-\alpha t}$)。放射性元素や血中カフェインの減少など皆そうだ。だから、たいていの振動の振幅も指数関数的に減少するだろう。そのような振動を減衰振動という。

一般の振動

振動は普遍的な現象なので、第 3 章 3,4 節の見方で理解を深めておこう。力とポテンシャル関数との関係式 (**??**) にバネの力 $F=-kx$ を当てはめると、$-kx=-dU/dx$ となる。微分して x になる関数をあなたは知っている。そう、$\frac{1}{2}\frac{dx^2}{dx}=x$ だ。だから、ポテンシャル関数 U が $\frac{1}{2}kx^2$ であることが分かる。そこで、前章末に出たハミルトニアンを書くと次のようになる。

$$\text{振動のハミルトニアン} \quad H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}kx^2. \tag{4.4}$$

これは重りをつけたバネの振動の全エネルギーを表わしている。初めつりあいの位置から x のところに重りがあるときのバネは $\frac{1}{2}kx^2$ のエネルギーをもっている。手を離すとバネは動き出し運動量と運動エネルギーが増えて、つりあいの位置を通り越す。すると今度は運動エネルギーがバネのポテンシャル・エネルギーに変わっていく—という往復運動を繰りかえすのだ。これがエネルギーの見方で見た「重りをつけたバネの振動」である。

ところで、ポテンシャル関数 $U=\frac{1}{2}kx^2$ は下に凸な 2 次曲線である。振動のポテンシャルの井戸を描いてみると、図 4.2 のよう

になる。この図は、**??**ページ図**??**のどんぶりの底によく似ている。つまり、曲線的なポテンシャルの井戸の底 (極小点) 付近は、k を適当な値にすれば $\frac{1}{2}kx^2$ という 2 次曲線で近似することができる。ということは、そこでの微小な運動は (4.4) のハミルトニアンで記述できる、すなわち振動的なものだということである。こうしてあなたのまわりに振動があふれていることが理解できる。平衡な位置にあるモノがわずかに動く場合その運動は振動であると。

どんぶりの底のビー玉の運動も一番の底を通るときは往復運動で、上から見ると直線運動である。その運動は図 4.2 に対応する。一番の底を通らない場合には 2 次元的な運動で、上から見ると楕円に似た運動をする。同じように、中心から r の距離のポテンシャルの側面が $-1/r$ の形をしている場合、すなわち重力場での月や人工衛星の楕円運動を理解することができるだろう。その運動は公転面での 2 つの方向、x 方向と y 方向の振動と見ることができる。物質中の原子や分子が 3 次元空間の平衡点に配列されている場合の平衡点付近の運動も、x, y, z 3 方向の振動と見なすことができる。

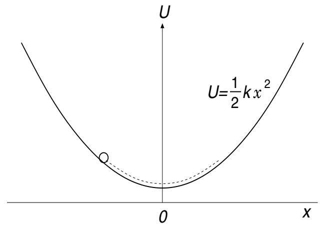

図 4.2: 単振動のポテンシャル.

振動と円運動と波の連関

単一の振動は (4.3) のように sin(正弦) で表わせることを見た。これを三角関数の定義に立ち返って考えるために、(4.3) 式の x を y と書き換え、鉛直上向きに y 軸をとろう。また、sin の中の

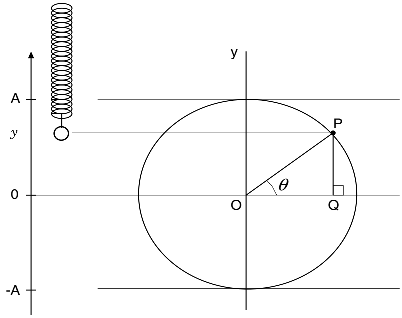

図 4.3: 振動と円運動.

$\omega t+\theta_0$ を θ と書き換えよう。(4.3) 式は次のように書ける。

$$y \text{ 方向の振動の変位} \quad y=A\sin\theta, \quad \theta=\omega t+\theta_0. \qquad (4.3)'$$

この sin 関数を図に描けば、図 4.3 のように、O を中心とする半径 A の円周上の点 P から水平軸上の点 Q へ垂線を下ろしたとき、角度∠ POQ= θ だと線分 PQ の長さが $A\sin\theta$ である。振動 $(4.3)'$ では時間 t とともに θ が大きくなる。それは点 P が円周上を反時計回りに周回することに対応する。時刻 $t=0$ のとき角度 $\theta=\theta_0$ から出発して、単位時間あたり ω ラジアンほど角度が増えていく回転運動である。ω を**角速度**と呼ぶ。今 ω を一定と考えているから、P の運動は等速円運動である。

振動と円運動は切っても切れない密接な関係にあることが分かる。たとえば地球の公転運動はほぼ等速円運動で、約 365 日かけて一周 $360°(=2\pi$ ラジアン) を回る。その角速度 ω は 1 日あたり $2\pi/365$ すなわち $360°/365\approx 1°$ ということになる。1 日あたり角度で約 1 度回転する。実は、1 日に進む角度がおよそ 1

度になるように $2\pi = 360^\circ$ と一周を 360 等分したのである。地球の公転を太陽系の外 (公転面上) から眺めたら、約 365 日かけて往復を繰りかえす振動と見えるだろう。観覧車も回転面上の遠くから眺めたら同じように振動と見える。先ほど話したどんぶりの底付近でのビー玉の運動が近似的に x, y, z の 3 方向の振動と見なせることが類推できるだろう。

地球は太陽のまわりを約 365 日かけて一周する。この一周にかかる時間が**周期**と呼ばれるものである。周期を T と書くと、$\omega \times T$ が 2π ラジアンである ($\omega T = 2\pi$)。時間 T かかって 1 往復の振動をするのであるから、単位時間に往復した回数、すなわち**振動数** ν は周期 T の逆数である ($\nu = 1/T$)。(4.3) 式で表わされる振動の周期 T と振動数 ν は次のようになる。

$$\text{周期} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} \quad = \quad 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad , \tag{4.5}$$

$$\text{振動数} \quad \nu = \frac{1}{T} \quad = \quad \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \quad . \tag{4.6}$$

これから、振動の周期は、重りの質量 m が大きいほど長くなり、バネの強さ k が小さいほど長くなる、つまりゆっくりした振動になることが分かる。逆に振動数は小さくなる。一般に、振動する部分の質量が大きいほど振動はゆっくりしたものになり、復元力が大きいほど振動は速くなる。あなたが弦楽器に親しむ人なら、ギターは低音の弦ほど太くて単位長さあたりの質量が大きく、弦の張りを強くすれば音が高くなることを知っているだろう。弦の振動数の大小が音の高低に対応しているのだ。

(4.3)$'$ 式は、バネにつけられた重りの位置が時間とともにどのように変化するかを示しているのであった。それを横軸に時間 t をとって描いた図は、あなたのよく知っている sin 関数のグラフ

である。ここからすぐに波が連想されるだろう。

固有振動

弦楽器の弦の振動数は、弦の質量と長さと張力で決まる。一般にモノが振動するときには、力学的な条件で決まるそのモノ固有の振動数で振動する。その振動を**固有振動**という。固有振動数は、基本になる振動数とその整数倍の系列をなしている。たとえば、音叉は材質と大きさ・形で決まる固有振動数 (基本振動数) で振動し、その変位はきれいな sin 関数で表わされる。同じ固有振動数の音叉を並べて置き一方を振動させると、もう一方も振動を始める。一方の音叉から出た空気の振動が他方の音叉をわずかの力で揺らし、その力のリズムが音叉の固有振動数と一致すると、エネルギーがどんどん蓄積されて振幅が大きくなるのである。この現象を**共振**と呼ぶ。弦楽器で弦の音の高さを隣の弦と同じにして弾くと、隣の弦も振動を始める。これも共振である。小さな吊り橋を揺らすとき、固有振動数と同じリズムで揺らすと揺れはどんどん大きくなる。調子に乗りすぎると綱が切れる事故が起きるかもしれない。実際、世界有数の橋が風に揺られて落ちたことがある。建物の固有振動数も地震のときに問題になるだろう。

振動の現象は電気回路でもある。コンデンサーとコイルを含む回路には、電流が行ったり来たりする振動電流が流れる。その振動数 (電気では周波数) は、コンデンサーの電気容量とコイルのインダクタンスという量の比で決まる。電波 (電磁波) で信号を送るのに、振動回路を利用してある周波数で振動する電磁波に信号を乗せる。受信側で同じ周波数の振動回路を用意すれば、共振によってアンテナに到達する電波を拾うことができる。ラジオの周波数を変えるつまみはコンデンサーの電気容量を調節して、望みの周波数の電波に共振させるのである。振動というコト

が普遍的な現象であることがここでも知られる。

4.2　モノの演じる波というコト

晩秋の公園の陽だまりでベンチに腰をおろして池を眺めていたら、誰かが大きな石を池に放り投げてそこから波が同心円状に広がっていった。水面に浮かんでいた木の葉が揺れて、波はあなたのいる池のふちまで寄せてきた。ふだん何気なく見ているけれども、揺れた木の葉はあなたの方に近づいたわけではないし、何度か寄せてきた波で池の岸側の水面が上昇したのでもない。ということは、木の葉は元あった水面のあたりで上下に振動しただけで、水は岸の方に流れてきたのでもない。これが波というものの基本的な性質だ。

落ちてきた石で水面が窪んだらまわりから水がやってきて水面が上昇するが、集まってきた水が多すぎてまたまわりに広がっていく、ところが今度も中心の水が逃げすぎて水面が窪んでしまう— ということを繰り返してその場所で水面が上下に振動するのである。この動きは必然的にその隣接した部分に影響して水の動きが生じ、そこでも水面が上下に振動することになる。こうして中心での水の上下振動がまわりに広がって波ができるのである。もちろん波が広がればエネルギーも拡散して、波の振動はしだいに小さくなる。実は、水面付近の水の運動はなかなか複雑で、単純な上下振動ではなくむしろ円を描くように動く。しかしここでは簡単に水面の上下振動のように見ておこう。中心部分の水面の動きがまわりに伝わるには時間がかかるので、周囲の水面の盛り上がり (波の山) は中心から離れるにつれて少しずつ遅れる。それで、ある瞬間には一つの方向への水面の形は sin 関数に

似た形をしている。ヒトの眼は残像を残しながら動画としてとらえるので、波の山が次々に中心から出ていき、時間とともにその sin 波形は外側に移動して行くように見える。これが水面を伝わる波というものだ。

正弦波

鉛直に吊り下げたバネの先の重りに糸をつけて水平に伸ばしておくと、重りの上下振動が糸に伝わり糸の他端まで波となって進む。弦楽器の弦のようにうまく設置しないときれいな波が見られないけれども、伸ばしたロープの端を上下に揺すると波が伝わろうとするのを目にすることはできる。図 4.3 のように鉛直上向きに y 軸をとり、水平に伸ばした糸の方向を x としてこの波を記述してみよう。重りの x 方向の位置を $x=0$、ω を $2\pi/T$ と書き換え、$\theta_0=0$ であつたとする。$x=0$ での糸の上下への変位は、$(4.3)'$ 式から $y=A\sin{(2\pi\frac{t}{T})}$ と表わせる。そこから x の距離での糸の変位はどうなるだろうか。そこでも時間 t とともに sin 関数で表わされる変位が起きるだろう。水面の波の観察から類推して、ある距離のところで $x=0$ のところと同期してリズムを刻むところがあるだろう。その距離を λ(ラムダ) と書くと、$x=\lambda$ のところで $x=0$ の変位と等しくなるのである。ただし、$x=\lambda$ のところは振動のリズムでちょうど 2π 遅れている、すなわち $y=A\sin(2\pi\frac{t}{T}-2\pi)$ だろう。そこで、任意の x の位置での変位は次のように書けるだろう。

$$\text{波}\quad y=A\sin{\{2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})\}}. \tag{4.7}$$

糸を伝わる波で、エネルギーが供給され続けて整然としたリズムで伝わっていくとすれば、ある時刻 t のある場所 x での y 方向への変位はこのように表わされる。ある時刻 t での糸の変位は

正弦波 (sin) の形にみえることになる。(4.7) の波を図に描くと図 4.4 のようになる。左の図は、ある場所での変位が時間とともにどう変わるかを示し、右の図は、ある時刻の波の形をしめしている。図 4.4 を見て分かるように、λ は波の山 (谷) から山 (谷) までの距離で、**波長**と呼ばれる。1 周期 T の振動の間に波は 1 波長の距離 λ 進む。

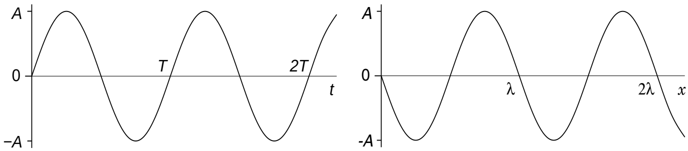

図 4.4: 正弦波.

波の性質

(4.7) 式の正弦波は、変位を時間 t で 2 度微分する運動方程式 (4.2)(x を y に書き換えたもの) から導出された。ところが波の変位 y は、時間 t の関数であるばかりでなく、位置座標 x の関数でもある。変数を 2 つ以上もつ関数をある変数で微分するとき他の変数を無視する微分を偏微分というが、(4.7) 式の sin の形をした変位 y に対して、時間 t あるいは位置座標 x でそのような偏微分を 2 度行なうと、前に出る定数がちがうだけで元の sin の形に戻る[1]。t での 2 度の偏微分を記号 $\partial^2/\partial t^2$、x での 2 度の偏微分を記号 $\partial^2/\partial x^2$ と表わせば、次の関係式が成り立つ。

$$\text{波動方程式} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \qquad v = \frac{\lambda}{T}. \tag{4.8}$$

[1] $y = A\sin\{(2\pi/T)t - (2\pi/\lambda)x\}$ だから、$\partial^2 y/\partial t^2 = -(2\pi/T)^2\, y$ に対して、$\partial^2 y/\partial x^2 = -(2\pi/\lambda)^2\, y$ である。

ここで $v = \lambda/T$ は、波が単位時間に進む距離、すなわち波の速さを示している。また数式を書いてしまったけれども、この型の式は自然現象を理解するのにとても大切なのである。(4.8) のような型の方程式を**波動方程式**という。自然界に出現する波はこの型の波動方程式を満たすのである。ここまで正弦波を考えてきたけれども、一般の波形をした波も (4.8) 式を満たす。

あなたはまだベンチに腰をおろして池を見ているとしよう。今度はあなたが 2 つの石を池に投げてみよう。すると、2 つの石の落ちた場所から 2 つの波が同心円状に広がっていく。2 つの波が出会うところで水面の凹凸が変化して、そのあたり全体を見ると独特のパターンが見える。ビデオにでも撮ってよく観察すると、2 つの波の山と山が重なったところで水面はさらに高まり、山と谷が重なったところで水面の高まりはなくなり、谷と谷の重なったところで水面の窪みが深くなっている。波の**干渉**という現象だ。波と波が出会うと、(4.7) 式のような波形が重ね合わされるということを示している。これを**波の重ね合わせの原理**という。一般に、複数の波はその変位を足し合わせた波になるのだ。多数の波を重ね合わせて複雑な波形になる場合も同じことである。

この現象に対応する数学的な理論が知られている。J.B.J フーリエによって発見された**フーリエ展開**である。どんな波形をした周期関数も sin 波と cos 波の和で表わすことができる。cos は角度をずらせば sin で書けるから、どんな波も (4.7) の形の波の足し算で表わせることになる。さらに言えば、どんな関数もフーリエ展開の形に表現できるのである。こうして、波の重ね合わせの原理に基づいて、(4.8) 型の波動方程式に従う波を取り扱うことができる。

先ほど音叉の振動が単振動だということにふれた。そこから

出る音波の変位は (4.7) のように書ける。実際に音叉の出す音をテープレコーダーで録音して、シンクロスコープという電気信号を画面に出す器具で見ることができる。この電気信号は、音叉から出た音を受け取る膜が時間とともにどう振動するかを示している。それは図 4.4 に示した sin 関数の形をしている。音叉の振動が単振動で、空気がそのリズムで振動することが分かる。こんどはあなたの声を録音してシンクロスコープで見たらどうなるだろうか。複雑な波形をしていて、同じ「あ」の音を出しても人によって異なる。一般に音はさまざまな振動数 (波長) の波を重ね合わせたものなのだ。フーリエ展開してどういう振動数の波がどんな割合で混じっているか出せる機械を使えば、重ね合わせを正確に分析できるだろう。いわゆる声紋はそうして得られる。異なる楽器で同じ高さの音を出しても**音色**が異なるのは、音の波形の微妙な差によるのである。

さて、海辺の港の突堤の内側で釣りをしていて「うき」が上下に振動することを経験した人があるだろう。沖から寄せる波は突堤の内側まで回り込んでくるのだ。このように、波が広がり障害物の裏側まで回り込む現象を波の**回折**という。波長の長い波ほど回り込みの度合いが強く、波長が短いほど回り込みにくい。あなたが本を広げて読みながら話しかけても、相手には声だけ聞こえてあなたの顔が見えない。音波の波長は長く、光の波長は比べものにならないほど短いからそういうことが起きるのだ。同じ電磁波でもラジオの電波はテレビよりも周波数が小さく波長が長いので、ラジオの電波は建物の影でも受信しやすいが、テレビは放送局との間に障害物があると映りにくい。

波の基本的な性質である反射・屈折・干渉・回折については、第 7 章の電磁波のところでもう一度ふれよう。

定常波

弦楽器の弦を振動させると固有振動数で振動することは既にふれた。よく観察すると振動が見える。両端の固定したところでは弦は動かず、その間の上下に sin 曲線の半波長分の波形を作るように振動する。振幅は真ん中のところで最も大きい。このように固有振動をして定常的に存在している波を**定常波**と呼ぶ。共振現象から推測されるように、固有振動では振動のエネルギーが逃げにくいのである。弦を右に進む波が右端で反射して折り返して進み、また左端で反射してというように、右に進む波と左に進む波が合成されてできる波である。管楽器の管の中でも空気の固有振動による音波の定常波ができる。その振動数は管の長さによってちがい、管の長さで音の高低を調節することができる。誰でも確かめることができる方法は、同じコップを並べて、入れる水の量を調節して水面からコップのふちまでの長さを順に変えることだ。コップを叩いて出る音を聞くと高低の順に聞こえるだろう。水面からコップの上端までの長さが短いと固有振動の音波の波長が短くなるから、共振を起こす音波の振動数が大きくなって音は高くなる。コップの場合は水面の側は閉じていてコップの上端の開いた管だから、両端が閉じている場合と波のでき方が違う。音の高さがちがうことになる。

音

ヒトの聞く空気の振動すなわち音波は、弦の振動と異なるところがある。糸や弦を伝わる波は、水面を伝わる波のように、ある場所の変位は波の進行方向と垂直な方向に起こる。このような波を**横波**という。図 4.4 で図示したのはこのような波である。横波は、ある部分での進行方向と垂直な方向への変位に対して、その変位を元に戻そうとする力が働く場合に生じる。固体では、

微小部分がどちらの方向に動いてもまわりからそれを妨げるような力が働き、横波が生じる。しかし、気体や液体ではそのような力は基本的に働かない。だから気体や液体には横波が発生しない。ヒトの聞く音波はしたがって横波ではない。

気体や液体である微小部分に変位が生じると、変位の方向に隣の部分を圧する力が働く。圧縮された隣は元に戻ろうとして押し返す。この動きを繰り返せば振動となる。最初に変位が生じたところで、気体や液体が疎になったり密になったりする振動が生じるのである。隣の部分では密から疎になるという振動が生じ、さらに隣の部分に振動が伝わるというふうにして波が伝わる。したがって、変位の方向と波の進行方向とが同じである。このような波を**縦波**あるいは**疎密波**と呼ぶ。この波でも空気や水の流れが生じているのではない。密度の振動が伝わるだけだ。あなたが太鼓を叩いて音を出しても、その先に浮かんでいるチリが向こうに進むのではないことを観察できるだろう。ここでもエネルギーが伝わるだけだ。言うまでもなく、あなたが手を打っても、空気のない月ではその振動が相手に伝わることはない。空気や水などの媒質が音波を伝えるのである。

既に音の高低は振動数の大小であることや音色についても話した。ヒトは音楽を聴いて音色を聞き分け名曲に感動するから、ヒトの耳は優れた音波検知器である。先ほどの音の振動数の分析器に準ずる働きをすることが分かる。ヒトは数十ヘルツ (Hz) から数万ヘルツ (Hz) 程度の振動数の音を感知する。ここで Hz は 1 秒間に何回振動するかの単位である。たとえば音楽の音階の振動数は数百 Hz である。ドの音から始めて 1 オクターブ上がると、振動数は 2 倍になる……。

波の話も尽きないけれど、この章を終えることにしよう。