第3章　出来事　— モノの運動 —

3.1　運動

真夏のじりじり焼けるような日中、あなたが龍安寺の縁側に座って石庭を眺めているとき、視覚はほとんど働いていないだろう。そこへ一匹のトンボが飛んでくると、あなたの眼はすぐに反応する。ヒトの眼は、時間の経過とともにモノが位置を変えるときによく反応するようにできている。すなわち、モノの運動はわれわれの第一の関心事である。出来事はモノの運動として起きる。その運動を考えることから始めよう。

今モノが位置を変えると言ったけれども、あなたがたった一人宇宙空間に居てまわりに何も見えないとしたら、はたして自分が動いたと知ることができるだろうか。誰も確かなことを言えないだろう。つまり、モノの運動は別のモノに対する相対的な位置の変化としてのみ考えることができるのだ。犬が迫ってくるのを知るのは、わたしと犬との距離が短くなっていることによって知るのである。わたしが逃げ出したら、犬もわたしも動いている。その場合に犬とわたしの運動を表現するには、それぞれの瞬間に地面上の目印のどこにいたかを言えばよい。つまり、系統的に運動を記述しようとするなら、適当な座標軸 (座標系) を設定して、時計で時間を計りながら時々刻々にモノの位置座標を測定するのがよい。トンボの動きのように 3 次元空間での運動に対しては、(x, y, z) の 3 つの座標軸を決めて位置を測定する。時間も計っているから、時間座標も測定している。こうして、一般にモノの運動の記述は、その位置座標 (x, y, z) を時間 t の関数として表現することによってなされる。

速度の定義

犬が迫ってくるとき、わたしは数秒のうちに自分のところまで来ることを予測する。ヒトはモノの速さを認識できるのだ。実際われわれは、平均速度という概念を日常的に使っている。

平坦な直線道路を自動車で走ることから始めよう。この直線運動は１次元の運動だから、座標軸として x 軸をとることにしよう。時刻 t_A[s] に A を出発するとき走行距離計が x_A[m] を示していて、B に着いた時刻 t_B[s] に走行距離計は x_B[m] を示したとする。AB 間の距離は $x_B - x_A$ であり、かかった時間は $t_B - t_A$ だから、距離を時間で割って、AB 間の**平均速度**を $\overline{v} = (x_B - x_A)/(t_B - t_A)$ のように求めるのが日頃のわれわれのやり方である。

しかし、自動車の速さは必ずしも一定でないことをあなたは知っている。ある時刻 t に位置 x の点 P を通過するあたりでの速さはいくらだろうか。それを知るには点 P のすぐ近くの点 Q でも通過時刻 t' と位置 x' とを測定する。そうすれば、P 付近での速さを PQ 間の平均速度で見積もることができる。今、$\Delta x = x' - x$、$\Delta t = t' - t$ と書き換えれば、それは次のように表わされる。

$$\text{平均速度} \quad \overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad [\mathrm{m/s}]. \tag{3.1}$$

ところが、これもまだ PQ 間での平均速度にすぎない。そこで、こう考えよう。測定の限界を超えて時間の間隔 Δt を限りなく短くしていけば、ついには時刻 t に位置 x を通過する瞬間の速度というものに到達できるだろう——と。これが、速度の概念である すなわち、任意の時刻における**速度** (velocity) を v と表わして次のように定義する。

$$\text{速度} \quad v = \frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad [\mathrm{m/s}] \tag{3.2}$$

ここに出てきたのは微分である。もともと微分は、速度という考えを問いつめて発見された。それまで人間は極限の思考を知らなかったのである。極限操作が、「飛んでいる矢は各瞬間どこかの位置にいて止まっている」というゼノンの自然言語による言い方に対抗させてくれる。力学を建設するとき、I. ニュートンは微積分法を開発しなければならなかった。

位置と速度の関係

時々刻々に自動車がどこにいたかをグラフに表わして考えてみよう。だが、現実に距離計を読み取る時間間隔には限度があるから、グラフは点の連なりとしかならない。したがって、測定できるのは (3.2) の微分ではなく、(3.1) の平均速度でしかない。実は自動車についている走行距離計も速度計も、タイヤの回転数から短い時間ごとの平均値を出して示しているにすぎない。そこで、測定で得た点の連なりをなめらかにつないだ曲線を、実際の運動を表わすグラフと見なそう (図 3.1)。A と B でのデータから平均速度を求めるやり方では、図 3.1 の AB を結んだ直線 AB の傾き $(x_B - x_A)/(t_B - t_A)$ を速度とする。これは、実際の運動を表わす曲線を直線 AB で近似したこ

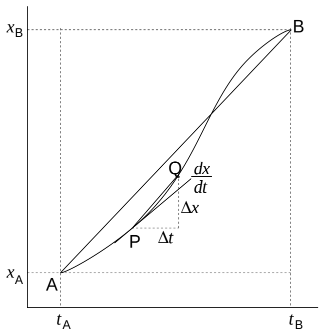

図 3.1: 位置と時間の関係.

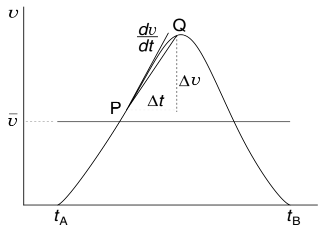

図 3.2: 速度と時間の関係.

とに当たる。この間一定の速度 $\overline{v}$ と見なすのだから、速度と時間の関係をグラフに書けば、図 3.2 の水平な直線 $\overline{v}$ で近似することに当たる。同様に PQ 間の平均速度は直線 PQ の傾き $\Delta x/\Delta t$ に等しい。

(3.2) 式で $\Delta t \to 0$、つまり図 3.1 で Q を曲線に沿って P に限りなく近づけていけば、ついには直線 PQ の傾きは曲線の P 点での接線の傾き dx/dt に一致するであろう。したがって、「ある時刻 t での速度 v は、位置を表わす曲線の t での接線の傾きに等しい」という結論を得る。

このようにして、刻々の位置を表わす曲線がわかっていれば、時々刻々の速度 (図 3.2 の曲線) も分かる。

加速度の定義

時々刻々の自動車の位置から刻々の速度が求まることを見てきた。同様にして、速度が時刻とともに変わる様子に注目すれば、単位時間あたりの速度の変化率を問題にすることができる。それが加速度である。

前ページの例で、P から Q へ動く時間 Δt[s] の間に速度が Δv[m/s] ほど変化したとする。この間の平均加速度 $\overline{a}$ を次のように定義するのである

$$\text{平均加速度} \quad \overline{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad [\mathrm{m/s^2}] \tag{3.3}$$

さらに、$\Delta t \to 0$ の極限をとれば、P 点を通過する時刻 t での**加速度** a を

$$\text{加速度} \quad a = \frac{dv}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad [\mathrm{m/s^2}] \tag{3.4}$$

と定義できる。ここで、記号 a は acceleration の略である。ところで、速度 v は (3.2) のように決められるのだから、(3.2) と

(3.4) という演算を 2 度繰り返せば、加速度は次のような 2 次微分で表わせる。

$$\text{加速度} \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \quad [\mathrm{m/s^2}]. \tag{3.5}$$

すなわち加速度は、時々刻々の位置 x が分かっていれば、時間で 2 度微分して直接求めることができる。

位置と速度と加速度の関係

こうして時々刻々に (3.4)、あるいは (3.5) の値を求めれば、刻々の加速度が得られることになる。図 3.1 から図 3.2 が得られたように、図 3.2 から図 3.3 のような時間の関数としての加速度 $a(t)$ を得ることができる。

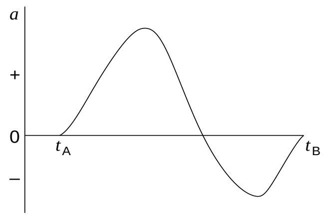

図 3.3: 加速度と時間の関係.

以上の手順で、

位置 $x(t)$	$\rightarrow$	速度 $v(t)$	$\rightarrow$	加速度 $a(t)$
図 3.1	$\rightarrow$	図 3.2	$\rightarrow$	図 3.3

と順に得られるわけだ。

ところで、この順番を進めれば、加速度の変化率も得られるが、力学でそれを問題にしないのはなぜだろうか。それは、次節の運動の法則に加速度しか出現しないからである。

速度が分かれば位置を予言でき、加速度が分かれば速度・位置を予言できる

自動車が秒速 v_0[m/s] の一定速度で位置 x_0 を通過したとすると、あなたは t 秒後の位置 x を予言できる。1 秒当たり v_0[m] 進

むのだから t 秒間に $t \times v_0$ 走る。したがって、t 秒後の位置 x は次のように表わせる。

$$\text{等速運動} \quad x = v_0 t + x_0. \tag{3.6}$$

速度が一定でないときも、平均速度が分かれば、(3.6) 式によって動いた距離を近似的に求めることができる。速度が刻々と変化するなら、時刻 t のあたりの平均速度 $v(t)$ を求めて短い時間 dt の間に進む距離を $v(t)dt$ と計算し、それを足し上げていけば、時刻 $t = 0$ から時刻 t までの全走行距離 $x(t)$ が求まる。足し上げの記号を積分記号で表わすと、

$$\text{速度} \rightarrow \text{位置} \quad x(t) = \int_0^t v(t)dt + x_0, \tag{3.7}$$

と書ける。時間の細分化を推し進めれば、それは積分である。つまり、一般に速度 $v(t)$ が知られていれば、任意の時刻 t の位置 $x(t)$ は (3.7) 式の積分によって求めることができる。ここで、x_0 は数学で言う積分定数である。時刻 $t = 0$ のとき位置 x_0 にあつたという初期条件を表わす。(3.7) 式は、速度 $v(t)$ が時間によらず一定値 v_0 をもつとき、(3.6) 式に戻る。つまり、(3.6) 式を一般化したものが (3.7) 式である。[1]

(3.7) 式と同様にして、加速度 $a(t)$ から速度 $v(t)$ へさかのぼることができる。すなわち、速度 $v(t)$ は加速度 $a(t)$ を積分して求めることができる。

$$\text{加速度} \rightarrow \text{速度} \quad v(t) = \int_0^t a(t)dt + v_0. \tag{3.8}$$

[1] (3.7) 式を、速度が時間とともに直線的に増加する場合、すなわち $v(t) = \alpha t$ の場合に具体的に適用してみよう。積分をすれば、$x(t) = \int_0^t \alpha t dt + x_0 = \alpha \left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^t + x_0 = \frac{1}{2}\alpha t^2 + x_0$ となる。$x(t) = \frac{1}{2}\alpha t^2 + x_0$ というどこかで見たことのある式が得られる。

ここで、積分定数 v_0 は時刻 $t=0$ のときの初速度を表わす。さらに位置 $x(t)$ を求めるには、(3.8) 式で得られた $v(t)$ を (3.7) 式に代入すればよい。

こうして、もし加速度が知られれば、

加速度 $a(t)$	$\rightarrow$	速度 $v(t)$	$\rightarrow$	位置 $x(t)$
図 3.3	$\rightarrow$	図 3.2	$\rightarrow$	図 3.1

とさかのぼって、時々刻々の速度と位置を予言することができる。[2]

微分・積分が出てきてちょっと敷居が高いように感じるかもしれない。しかし、ここでは計算問題を解こうとしているのではなく、運動をどのように理解すればよいかを考えている。23 ページからここまでの話の流れを把握することが大事なことだ。運動とは、時間の経過につれてモノが位置を変えることである。その変化を定量的に取り扱うのに必須の方法として微積分は開発された。数学は、一般にある量がどのように変化するかの分析を、微積分を使う関数解析として発展させてきた。あなたも、関数の増減を 1 次微分や 2 次微分で調べることを、訓練したはずだ。ここではその方法を、モノの運動に具体的に適用しているのである。

自然科学の重要な法則の多くで、dx/dt のような変化率が問題となる。ここで運動について見た方法は、運動以外の一般の現象に拡張することができて、出てくる量がどのように変化するかを考えるのに有効である。

---

[2]たとえば、加速度が一定値 α をとるとき ($a(t)=\alpha$)、速度 $v(t)$ と位置 $x(t)$ は次のように計算される。$v(t) = \int_0^t \alpha dt + v_0 = \alpha\Big[t\Big]_0^t + v_0 = \alpha t + v_0$ 、$x(t) = \int_0^t (\alpha t + v_0) dt + x_0 = \frac{1}{2}\alpha t^2 + v_0 t + x_0$. 加速度 a から位置 x へさかのぼるのに 2 度積分したから、2 つの積分定数 v_0 と x_0 が現われる。v_0 と x_0 は、それぞれ時刻 $t=0$ のときの初速度と初めの位置を表わす。高校で暗記させられたこの 2 つの「公式」は、速度と加速度の定義から導かれることが知られる。

3.2　運動を律する力学法則

運動の法則

今日はミニチュアの自動車を床の上で転がす遊びから始めよう。このミニチュアカーは勢いよく飛び出してもやがて止まってしまう。たいていの動いているものもいつか止まる。物体の速度はほっているといつか失われるのだろうか。もしあなたがガリレイ以前に生まれていたら、この結論を疑わなかったかもしれない。しかし、ニュートン以後に生きるわれわれは次のように考えなければならない。

たしかにミニチュアカーは止まるが、じゅうたんの上から畳の上、さらに廊下へと場所を移せば、動く距離はしだいに伸びる。床の種類によって動きが違うということは、床から何らかの作用 (**力**) が働いているのだ。ミニチュアカーはほってておかれないで、床との摩擦によって運動を邪魔されているのである。この摩擦力がなければ、ミニチュアカーは、運動の状態をできるだけ変えまいとする性質 (**慣性**) によって、速度を一定に保つと考えるべきだ。天動説をとる人は、実際に地球が回っているなら、地面から飛び上がったとき少し西側の位置に落ちるはずではないか、と言って地動説に反論した。しかしガリレイは、人は地球と同じ速度で動いていて、飛び上がる前にもっていた速度で地球といっしょに東へ動くから、地面の元の位置に落ちるのだと考えた。

そうすると、力とは一定速度の運動状態を変化させる要因と見るべきだ。ミニチュアカーを静止の状態から動かすのにも文字通り力を行使する。力によって加速度が生じたのである。力が大きければ速度の変化も大きいから、生じる加速度の大きさは力に比例するだろう。また力の向きは物体の動く方向に影響するから、力と加速度は大きさだけでなく方向をもつ**ベクトル量**だ。さら

に、同じ大きさの力が働いても動きやすいものと動きにくいものがあるから、加速しにくさの尺度を表わす物理量 (**質量**) が定義できるだろう。また、小舟を岸壁につなぐロープを引けば岸壁が小舟を引いてくれ、逆に竿で押せば岸壁は小舟を押し返してくれる。力は必ず物体の間の相互作用として存在するといえる。すなわち、作用には必ず反作用がつきものである。……

ニュートンは力学の基本法則を 3 つの**運動の法則**にまとめた。以下にそれを整理しよう。

運動の第 1 法則 (慣性の法則)

他から力を受けない物体は、静止したままかあるいは一定速度の直線運動を続ける。速度が変化したらその原因を他からの作用 (力) に求めることができる基準の座標系を**慣性系**と呼ぶ。

運動の第 2 法則 (運動方程式)

慣性系で運動を見れば、物体に他から力が作用すると加速度が生じ、生じる加速度 $\boldsymbol{a}$ は力 $\boldsymbol{F}$ に比例し質量 m に反比例する。

$$m\,\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}. \tag{3.9}$$

運動の第 3 法則 (作用・反作用の法則)

2 つの物体AとBの間に力が働くとき、AがBに及ぼす力とBがAに及ぼす力とは大きさが等しく反対向きである。

運動の法則の意味

運動方程式 (3.9) で、$\boldsymbol{F} = 0$ のときには $\boldsymbol{a} = 0$ が得られる。すなわち、力が働かなければ、加速度が生じず速度が変化しないという第 1 法則と同じ結論が得られる。では何のために第 1 法則があるのだろうか。第 1 法則は、運動を観測する座標系として

慣性系を指定しているのである。…駅を出発する電車に乗っていて、自分の電車の方が動き始めたのに、隣に停車していた電車の方が動き出したと錯覚した経験があるだろう。動き出した電車を基準の座標系にとると、「進行方向に力が働いていない隣の電車に加速度が生じた」ように見える。このような座標系では第 1 法則が成り立たないのである。第 1 法則は、動き始めの電車のような加速度運動する座標系から運動を記述しない、ということを主張している。…　経験上、地上で起きる運動は地面に立って眺めると第 1 法則がほぼ成り立つので、地面に固定した座標系を慣性系と見なそう (地球の自転や公転は速度の向きが変わるから加速度運動であって、地面は厳密には慣性系ではないのであるが)。同じく月や人工衛星の運動については地球に原点を置く座標系がほぼ慣性系で、地球の運動については太陽に原点を置く座標系がほぼ慣性系である。

第 1 法則を満たす慣性系から観測して物体の速度に変化が生じれば、他の物体からの力が原因である。質量が分かっていて、働く力が知られれば、第 2 法則 (3.9) 式から加速度を求めることができる。そうすれば、前節で見たように、速度・位置とさかのぼってその物体の運動を予言することができる。こういう意味で、この式は運動方程式とよばれるのだ。力学を学んだことのない人は、物体が運動しているのを見ると運動の方向に力を受けていると考えがちである。しかし第 2 法則は、速度は必ずしもその瞬間に力が働いていることを表わしてはいず、各瞬間に加速度が力と比例関係にあることを表明している。物体が静止していたり、等速で直線運動するのは力が働いていないからだ。物体の動きに変化が現われたとき、つまり速さや方向を変えたとき、物体に力が働いたのだ。はかりと物差しと時計があれば、物体の

質量と加速度を測定できる。こう考えると、(3.9) 式は力の定義を与えていると見ることもできる。

第 3 法則は、ニュートンの考える力というものの性質を決めている。それは 2 つの物体の間に働く相互作用である。あなたは日頃、遠心力という言葉を使うだろう。しかし、遠心力の反作用は何かと問われれば答えに窮するだろう。遠心力は第 3 法則でいう力とは違ったものなのだ。運動方程式 (3.9) は慣性系だけで成立し、加速度運動する座標系から見れば修正された式になることに注意しなければならない。さて、運動の法則で出てきた質量はまだ未定義量であるとも言える。第 3 法則はその定義を与える役目を担っている。作用・反作用を及ぼしあっている 2 つの物体 A と B を想定しよう。力の大きさは等しいから、生じる加速度の大きさ a_A, a_B と質量 m_A, m_B の間には、$m_A a_A = m_B a_B$ の関係が成り立つ。したがって、質量比は $m_A/m_B = a_B/a_A$ となる。加速度の大きさ a_A, a_B は測定可能量だから、質量比 m_A/m_B を求めうる。原理上このやり方で、ある基準のモノに対する比で他のモノの質量を決めることができる。

結局、運動の 3 法則は互いに支えあって、慣性系・力・質量という 3 つの概念を定義しているのである。一旦この枠組みが確定すれば、運動方程式 (3.9) が中心的役割を果たすことになる。

運動方程式の解き方

このように力学法則は、運動を記述する鍵である加速度が運動方程式によって決定されることを教える。その加速度は、前節で見たように速度の 1 次微分または位置の 2 次微分で与えられる。それゆえ、運動方程式 (3.9) は次のように表現できる。

$$\text{運動方程式} \quad m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F}, \tag{3.10}$$

あるいは、

$$\text{運動方程式}\quad m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F}. \tag{3.11}$$

運動は3次元空間で起きるから、一般に位置は3つの座標 (x, y, z) で指定しなければならない。つまり、4 ページの図**??**の矢印のように、大きさと方向をもつベクトル量である。そのベクトル量を簡潔に 1 つの太字の記号で表現して、たとえば 3 方向の成分をもつ位置ベクトルを記号 $\boldsymbol{r}$ で表現しよう。同様に、速度 $\boldsymbol{v}$ や加速度 $\boldsymbol{a}$ や力 $\boldsymbol{F}$ も方向をもつベクトル量であり、それぞれ 3 方向の成分 (v_x, v_y, v_z), (a_x, a_y, a_z), (F_x, F_y, F_z) をもつ。だから、運動方程式 (3.10) と (3.11) は 1 つの式に表現してあるが、(x, y, z) の 3 方向に関する 3 つの方程式を意味している。

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = F_z. \tag{3.12}$$

この方程式は 2 階の微分方程式と呼ばれるもので、2 度積分して物体の位置 (x, y, z) が求まる。2 度の積分で出てくる 2 つの積分定数は、時刻 $t = 0$ での位置と速度がどういう値であったかという初期条件によって決定される。初期条件は、運動方程式そのものの中には現われない。運動方程式が同一でも、初期条件のちがいによって多様な運動が許されることになる。たとえば、枝から落ちるリンゴと放り投げて放物線を描くリンゴとの、鉛直方向の運動方程式は同じものである。鉛直上向きに y 軸をとると、y 方向の運動方程式は共に $md^2y/dt^2 = -F$(重力) と書ける。

こうして、質量 m と力 $\boldsymbol{F} = (F_x, F_y, F_z)$ が知られていれば、運動方程式を解いて、速度 $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, v_z)$ と位置 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ を求めることができる。つまり、物体がどのような運動をするかが分かるのである。だから、ある物体の運動を解き明かすには、まずその物体にどのような力が働いているかを知らなければな

らない。2 つ以上の力が働く場合もあるから数え落とさないようにする。次に運動方程式を立てるのだが、加速度や力がベクトルだから一般には (3.12) のように 3 つの式を書き下す。しかし、多くの問題では 2 つか 1 つの式ですむ。ある平面内の運動なら 2 つの式、直線的な運動なら 1 つの式を立てるのである。それから、その方程式を解くことに取りかかる。数学公式集やよい友人の助けを借りればきっと解けるだろう。

万有引力 —天と地と—

ここで W.S. モームばりに月と小さなリンゴを対比して話を進めてみよう。地上の運動を観察すると、すべての物体に鉛直下向きに働く重力に気付く。リンゴに風が吹いて枝から離れると地面に向かって落ちていく。ガリレイは、斜面を利用した物体の落下の観察から、その速度が時間とともに速くなること、31 ページの脚注で考えた一定加速度の運動をすることに気づいていた。その加速度は、空気抵抗が無視できるとき、組成の異なる大小の物体について同じ大きさである。落下するリンゴを見つめていたニュートンはそのことを知っていたし、惑星が太陽のまわりを公転するときのケプラーの法則を知っていた。そして、運動の法則を発見したのである。リンゴも他のモノも一定加速度で落下するとしたら、運動方程式から、それらには物質の種類によらず質量に比例する一定の力が働いていることが分かる。他方、夜空に浮かぶ月がケプラーの法則に従って運動するのは何故か…。ついにニュートンは**万有引力**を発見した。天にある月にも、地上のリンゴにも、万物に同じ万有引力が作用して、同じ力学法則が成り立つ。モームの同国の先人は、天体である月も一個のリンゴにすぎないことを見破っていたのである。

万有引力 (**重力**) の法則は、次のように言い表わせる。「すべて

の質量をもつモノの間には引力が働く。その大きさは、2 つのモノのそれぞれの質量に比例し、両者の距離の 2 乗に反比例する」。2 つの質量を m_A, m_B と書き、距離を r と書けば、力の大きさ F は次のようになる。

$$\text{万有引力 (重力)} \quad F = G\frac{m_A m_B}{r^2}. \tag{3.13}$$

G は比例定数である。G の値はここでは必要ないであろう。リンゴは地球に引かれるのと同じ大きさの力で引き返していることに注意しよう。あなたはリンゴが落ちると表現するけれども、リンゴから見ると地球が落ちてくるのである。もっとも、地球は圧倒的に質量が大きいから、リンゴと地球の重心は地球の中心にあって、そこに座標系を置いて運動を記述するのが適切なのだが。

重力を発見したニュートンは、月に対して運動の法則を適用し、地球を周回する運動を見事に説明した。運動している月は、接線方向にまっすぐ飛んで行こうとするが、地球からの重力に引かれているのでしだいに地球に向かって落ちる。そうしているうちに元の位置に戻って、地球を周回することになるのである。飛んでいるリンゴも重力に引かれて落ちていく。しかし地面からそう遠くないところを飛んでいるので、まもなく地平面に行き当たる。もし誰かがリンゴをうんと上空で十分速い速度で投げたら、地平面に行き当たることはないだろう。ニュートンは人工衛星を発明してもいた。

こうして、天上のモノも地上のモノと同じ種類の物質にすぎないこと、運動の法則が天と地のモノに共通に適用できることが明らかになった。この世界全体が人間の営みの対象にできることを教えたのである。

昔から人は地表面での重力を重さとして測ってきた。重力は物質の種類などによらない物質の量に比例していると認められる。

普通この量をはかりで量って質量として用いている。はかりで量っているのは直接には力であって、すべての物質に共通な単位質量当たりの重力 g を基準に量っている事になる。そこで、地表面で質量 m の物体に働く重力は mg と書ける。ところがよく考えると、運動方程式 (3.9) と重力の法則 (3.13) とは別の法則である。2 つの式に現われた質量が同じであるという保証はない。運動方程式に現われた質量を**慣性質量**と呼び、重力に現われる質量を**重力質量**と呼ぶ。あるモノの重力質量を m 倍するとき、加速されにくさを表わす慣性質量も m 倍で増えるという保証はない—ということだ。しかし、経験上 2 つの質量の間に測定の精度にかかる差異は見つからない。一般相対性理論では両者を同一のものとする。そこで、両者を区別することなく単に質量と呼ぶ。

3.3　モノの保持する物理量:　運動量とエネルギー

子供の乗った三輪車にぶつけられても、大人の乗った自転車ほどの被害を受けないのはなぜか。あるいは、高い建物の最上階まで階段を登ればずいぶん労力が要るが、地面にいるときと最上階にいるとき何が違うのだろうか。これらのことを簡潔に説明できる重要な概念がある。運動量とエネルギーという物理量である。

(1) 運動量

質量の大きなダンプカーと質量の小さなオートバイが同じスピードで何かに衝突する場合、ダンプカーの方が止まりにくい。同じオートバイなら速度の大きい方が止めにくい。このように、運動している物体は、その質量と速度の大きさに関係する「いきおい」というものをもっている。

運動方程式 (3.10) を $d(m\boldsymbol{v})/dt = \boldsymbol{F}$ と書いてみよう。この式

は、「力 $\boldsymbol{F}$ が働くと $m\boldsymbol{v}$ (質量×速度) という量が変化する。もし力が作用しなければ、$m\boldsymbol{v}$ は時間的に変化せず一定に保たれる」ことを示している。これから、質量と速度に比例する**運動量**という物理量を定義して、運動を論じることができる。

$$\text{運動方程式} \qquad \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F}, \tag{3.14}$$

$$\text{運動量} \qquad \boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}. \tag{3.15}$$

猛スピードのダンプカーの特徴は、力学的な言葉で「大きな運動量をもつ」と言えばよい。運動量で表現した運動方程式 (3.14) は、後の章で見るように重要な役割を果たす。言葉で言えば、「物体に力が働けば運動量が変化する。逆に、運動量が変化したとすれば力が働いたからで、その変化率 $d\boldsymbol{p}/dt$ から物体に働いた力が分かる」ということである。

運動方程式 (3.14) は、刻々の運動量の変化を表現している。しかし、実際にテニスボールに力が働くとき、力が作用している時間はゼロではない。刻々変化する力が働いて運動量を変化させながらその積み重ねの結果として、出来事の初めと終わりで運動量が違ってくるのである。その変化の総量は、出来事にかかった時間について足し上げて求められる。初めの運動量と速度を $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{v}$、終わりの運動量と速度を $\boldsymbol{p}'$ と $\boldsymbol{v}'$ と書いて、このことを次のように表現できる。

$$\text{運動量の変化} \quad \boldsymbol{p}' - \boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}' - m\boldsymbol{v} = \int \boldsymbol{F} dt. \tag{3.16}$$

右辺は、ある時間のあいだ力を受けた効果の総和を意味する。この式は、大きな質量の猛スピードのダンプカーが塀にぶつかって速度を失う ($m\boldsymbol{v}' = 0$) には、(力が作用する時間の長さに応じて) 大きな力を受けなければならないこと、つまり、大きな力で塀を

押すだろうことを示している。逆に、子供の三輪車が塀にぶつかつても塀は壊れないし、三輪車もひどくは壊れない。

こうして一般に、「物体は力が作用しなければ運動量を保存しようとする」という結論を得た。$m\boldsymbol{v}$ のうちの速度 $\boldsymbol{v}$ は方向をもつベクトル量だから、運動量もベクトル量であって、(3.14) 式や (3.16) 式は、運動量の方向を変えるにも力が働かなければならないことを表わしている。ダンプカーは急には止まれないだけでなく、急に方向を変えることも難しい。

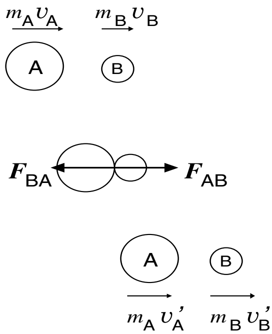

図 3.4: 2 物体の衝突.

自動車が他の物体に衝突して運動量を失ったとすると、失われた運動量はどうなったのだろうか。それを知るには、自動車に力を及ぼした相手までひっくるめて考えればよい。2 つの物体 A と B が作用・反作用を及ぼしあって、A の運動量が $m_A\boldsymbol{v}_A$ から $m_A\boldsymbol{v}'_A$ に変化し、B の運動量が $m_B\boldsymbol{v}_B$ から $m_B\boldsymbol{v}'_B$ に変化したとしよう。A には B から $\boldsymbol{F}_{BA}$ の力が、B には A から $\boldsymbol{F}_{AB}$ の力が短い時間のあいだ働いたとすると、(3.16) 式を書き下せば、A に対して $m_A\boldsymbol{v}'_A - m_A\boldsymbol{v}_A = \int \boldsymbol{F}_{BA}dt$、B に対して $m_B\boldsymbol{v}'_B - m_B\boldsymbol{v}_B = \int \boldsymbol{F}_{AB}dt$ となる。ところが、$\boldsymbol{F}_{AB}$ と $\boldsymbol{F}_{BA}$ は作用・反作用の関係にあるから、どの瞬間にも $\boldsymbol{F}_{AB} = -\boldsymbol{F}_{BA}$ である。つまり、2 つの式の右辺は大きさが等しく符号が逆である。したがって、2 つの式の左辺も大きさが等しく符号が逆でなければならない。

$$m_A\boldsymbol{v}'_A - m_A\boldsymbol{v}_A = -(m_B\boldsymbol{v}'_B - m_B\boldsymbol{v}_B). \tag{3.17}$$

つまり、「一方の運動量の増え高は他方の運動量の減り高に等し

い」。書き換えれば、次の式が得られる。

$$m_A \boldsymbol{v}'_A + m_B \boldsymbol{v}'_B = m_A \boldsymbol{v}_A + m_B \boldsymbol{v}_B = \text{一定}. \tag{3.18}$$

この式は、**運動量保存の法則**と呼ばれるもので、「考えている 2 つの物体がお互いに相互作用しているだけで他から力を受けていなければ、運動量の総和 $m_A \boldsymbol{v}_A + m_B \boldsymbol{v}_B$ は一定値を保つ」ことを示している。3 つ以上の物体があっても同じように、運動量の総和 $\sum m\boldsymbol{v}$ は外からの力がない限り不変に保たれる。この見方では、力が作用している途中経過を問題にせずに、出来事の初めと終わりの運動量にだけ注目すればよい。それは、運動方程式 (3.14) を時間について積分した (3.16) 式を考えているからだ。

運動量保存則は、物体の衝突だけでなくロケットの打ち上げなどを理解するのに非常に有効な考え方である。大砲は火薬の 1 回の爆発で弾丸を打ち出し、自身は少し後退する。このとき、砲と弾丸の運動量の和は打ち出す前と同じくゼロである。すなわち、$(M\boldsymbol{v})_{\text{砲}} = -(m\boldsymbol{V})_{\text{弾丸}}$。だから、質量の小さい弾丸の方が大きな速度を得て飛び出すのだ。地球の重力に逆らってロケットを打ち上げるときも、燃料を燃やして猛烈な速度ではき出してその反作用で運動量を得る。燃やした燃料の下方への運動量とちょうど同じ大きさの、上方への運動量の増加を絶えず得ながら、ロケットは地球の引力圏を遠ざかる。人工衛星を打ち上げるロケットが大きな燃料タンクを持っているのはそのためである。打ち上げ花火が昇りきったとき中心で爆発すると、埋め込まれていた粒の揃えられた火薬球が総運動量をゼロに保つように、八方に丸く広がる。1 つの火薬球がある方向に飛び出すと、いつも別の火薬球がその反対方向に同じ大きさの速度で飛び出すのだ。その後よく観察すれば、小球の広がりは下ぶくれになりながら落ちていく。それぞれの小球に重力が作用しているからだ。重力は花火の各部

分に外部から作用する力で、それぞれの運動量を変化させる。

(2) 回転と角運動量

回転的な運動に対しては、以下に見るように、運動量を少し変形した物理量を採用するのがよい。シーソーのバランスは、右と左にかかる重力の、時計回りに回転させようとする効果と反時計回りに回転させようとする効果がちょうど打ち消しあって保たれる。経験によれば、回転させようとする効果は、作用する力の大きさだけでなく、回転の中心からの距離が長いほど大きい。

回転の中心からの距離 ($\boldsymbol{r}$ と書こう) と力 ($\boldsymbol{F}$) を掛け合わせた量 $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ を**力のモーメント**と呼ぶ。ドアの取手が回転軸のすぐ近くに付いていたら、あなたはそれが遊びだと気づいて微笑するだろう。あなたに茶目っ気があれば、取手が回転軸から離れて付いていても、引き戸のように引いてドアが開かないという演技をすることができる。$\boldsymbol{r}$ と平行な力 $\boldsymbol{F}$ を加えても回転に寄与しないのである。2 つの矢印 $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{F}$ で平行四辺形を書こうとしても描けない (面積 0) とき、回転に寄与しない。そこで、力のモーメント $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ の大きさを、矢印 $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{F}$ のつくる平行四辺形の面積で定義する。さらに図 3.5 のように、力のモーメント $\boldsymbol{N}$ を、平行四辺形の面に垂直な回転軸の方向のベクトル量として定義することにしよう。

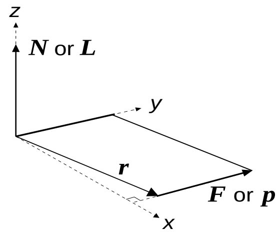

図 3.5: 力のモーメントと角運動量.

そうして、運動方程式 (3.14) の右辺に力のモーメント $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ が出るように、両辺に $\boldsymbol{r}$ を掛けて表現しよう。

$$\text{回転的な運動} \quad \frac{d}{dt}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}) = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}. \tag{3.19}$$

この式は、右辺の力のモーメント $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ が 0 なら、左辺のかっこの中の $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ が時間によらず一定値を保つことを教える。この量 $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}\ (= \boldsymbol{r} \times m\,\boldsymbol{v})$ を**角運動量**と呼ぶ。運動量のときと同じ言い方をすると、「物体を回転させようとする力のモーメントが 0 なら、その物体は角運動量を保存しようとする」のである。角運動量 $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ もベクトル量で定義する。大きさを図 3.5 のように $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{p}$ がつくる平行四辺形の面積とし、方向をその平行四辺形の面に垂直な方向とする。

太陽のまわりを運動する惑星を考えてみよう。太陽の質量は惑星に比べて圧倒的に大きいから、近似的に太陽は動かず、一つ一つの惑星が太陽のまわりを周回していると見なせる。図3.6のように、太陽から惑星に伸ばした矢印が式 (3.19) 中の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ である。太陽が惑星を引く重力 $\boldsymbol{F}$ はちょうど $\boldsymbol{r}$ と逆向きで、$\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{F}$ で平行四辺形をつくれない。だから、太陽の引力は惑星の周回運動を変更せず、惑星のもつ角運動量 $\boldsymbol{r} \times m\,\boldsymbol{v}$ は保存する。ここで、$\boldsymbol{v}$ は公転速度である。惑星の質量 m は変化しないから、$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}$ が一定値に保たれるということになる。つまり、$\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{v}$ のつくる平行四辺形の面積が一定値を保つのだ。言い換えると、図 3.6 で $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{v}$ がつくる三角形の面積が一定値を保つ。これがケプラーの第 2 法則のいう「面積速度一定」ということである。

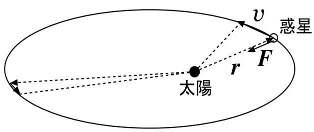

図 3.6: 角運動量の保存.

ハレー彗星は、太陽の近くでは大きな速度で速く動き、遠くでは速度を遅くして、2 つの三角形の面積が等しくなるように周回する。これを一言で「角運動量 $\boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}$ は保存する」と表現でき

る。このとき、角運動量はベクトル量で定義したから、その空間中での方角も変化しないことを意味している。つまり、惑星の公転面が銀河系の中で変化しないということだ。こうして、地球は今年も来年も 1 年かけて同じ公転面を一周し、北極星は天空で決まった方角に見える。補足すれば、地球の自転でも角運動量は保存していて、1 日の長さが変わらず、公転面に対して自転軸の方向を変えない。春夏秋冬は規則正しく訪れてくれる。第 9 章で見るように、原子中の電子も角運動量を保存する。角運動量という概念がとても有用なことが分かるだろう。

(3) 仕事とエネルギー

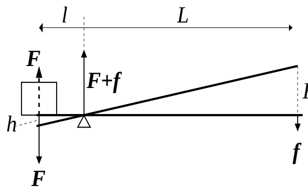

図 3.7: てこを使う仕事量.

ヒトがモノを動かすとき素朴な意味で仕事という言葉を使うが、この仕事の量を客観的に測ることによってエネルギーという量を決定できる。ヒトは古くから「てこ」の原理を利用して重い物体を動かしてきた。てこが長ければそれだけ小さな力ですむ。しかし、モノを動かしたという結果が同じなら、同じ仕事をしたと考えるべきではないだろうか。図 3.7 で、物体を図中破線矢印の力で押し上げようとすると、物体は同じ大きさの力 F でてこを押し返す。力のモーメントのつりあいを考えると、てこの反対側で加えるべき力 f と力 F との間には、支点からの距離 L と l を用いて $Lf = lF$ の関係がある。ところが図から分かるように、物体を高さ h 持ち上げるのに、てこの端を距離 H ほど押し下げなければならない。左右の図形は相似だから $l : L = h : H$ である。したがって、$fH = Fh$ の関係があることが分かる。力 × 距離は一定値をとり不変なのである。

そこで、物理的な意味の**仕事量**を

$$仕事量 = 力 \times 距離. \tag{3.20}$$

と定義する。ただし、ベクトル量である力が仕事に寄与するのは動いていく方向に沿う力だけで、それに垂直な方向の力は仕事に寄与しないと考える。円運動をしている人工衛星は、地球の引力で引かれて飛び去らないのであるが、衛星は円の接線方向へ動き地球の引力はそれに垂直だから、地球は人工衛星に仕事をしない (衛星はエネルギーを変えない) ことになる。仕事量は、力が刻々変化しても短い距離ごとの仕事量の総和として得られる。モノの動いた道筋に沿って測る距離を s と表わそう。ある短い距離 ds 動くとき、力のベクトル $\boldsymbol{F}$ の ds 方向の成分を F_s と表現すれば、その間に力のした仕事は $F_s ds$ である。仕事量はそれを足し上げて次のようになる。

$$仕事量 = \int F_s ds. \tag{3.21}$$

仕事量は普通の数値で表わせる量 (スカラー量) であり、運動量のように方向をもつベクトル量ではないことに注意しよう。

運動エネルギー

あなたの知っている**エネルギー**という物理量は仕事をする能力のことで、上で定義した仕事量で量る。たとえば、あなたが庭に杭を打ち込もうと思ったら、重い槌を勢いよく振り下ろす。質量が大きい槌で速度が速いほど杭を深く打ち込め、大きな仕事をすることができる。運動しているモノはエネルギーをもつのである。それを**運動エネルギー**と呼ぶ。

⇓ 運動エネルギーがどのように表現できるか見るために、単純な直線運動を考え、運動方向の力を F と書こう。質量 m の物体

に力 F が働くと物体の速度 v が増加し、力と速度の増加率 dv/dt の間には運動方程式 $F = m(dv/dt)$ の関係がある。他方、速度 v の物体が dt 秒間に動く距離 ds は、$ds = vdt$ である。力が物体にした仕事は、Fds を足し上げればよいから、$\int mv\frac{dv}{dt}dt$ と書ける。この積分は、$m\int v\,dv$ という単純な形にできる。v を x と読み替えれば、積分のところはあなたの知っている $\int xdx = \frac{1}{2}x^2$ だ。したがって、力が働いて速度 v になった物体が得たエネルギーは、$\frac{1}{2}mv^2 +$ 積分定数 と書ける。

$\gg$ 一般に、質量 m で速度 v のモノのもつ運動エネルギーを次のように表現できる。

$$\text{運動エネルギー} = \frac{1}{2}m\,v^2. \tag{3.22}$$

ここで、静止している (すなわち $v = 0$ の) モノの運動エネルギーが 0 となるように積分定数を 0 とした。つまり運動エネルギーとは、静止しているときと比較して運動しているモノが余分にもつエネルギーのことである。杭を打ち込む仕事をして静止した槌は運動エネルギーを失うのだ。

ポテンシャル・エネルギー (位置エネルギー)

建物を建てるような大がかりな工事で基礎を固めたり杭を打ち込むときには、重りを道具で持ち上げて高いところから落とす。この場合にも仕事をすることができるから、高いところに吊り上げられた重りはエネルギーをもっていると言える。このエネルギーを**ポテンシャル・エネルギー**と呼ぶ。モノの位置によってエネルギーが決まるという意味で**位置エネルギー**とも言う。

そのエネルギーを計算するには、仕事量 (3.21) 式で力 F_s が具体的にどんなものかを代入すればよい。地表付近の重力は、39 ページで見たように、鉛直下向きに一定の大きさで、$F_s = mg$

と表わせる。今地面から鉛直上向きに y 軸をとり、地面を基準に高さ y を測ることにしよう。質量 m の物体が高さ y の位置から地面に落ちると、重力 mg で距離 y 動いたわけだから、その仕事量は mgy ということになる。逆に地面から y の高さまで重力に逆らって持ち上げるには、mgy の仕事をしなければならない。そこで、地面から高さ y の位置にある質量 m の物体がもつポテンシャル・エネルギー U は次のように表わされる。

$$\text{重力の位置エネルギー}\ U = mgy. \tag{3.23}$$

エネルギーはいつも「ある基準から見てどれだけ余分のエネルギーをもつか」として量られることに注意しよう。今の場合、地面を基準にしているが、別のところを基準にしてもよい。

こうして、汗をかいて階段を上がって最上階の部屋にいるあなたは、地面に立っているときよりもよけいにエネルギーをもっているのである。エレベーターで上がれば楽だったのだが、エレベーターは電気代をくって仕事をする。あなたの得た位置エネルギーの量は、最上階へどのような手段で上がったかに関係せず、ただ地面から測った位置だけで決まっている。ポテンシャル・エネルギー U は位置座標の関数として表わされる。

ポテンシャル関数 U は、(3.21) 式で動いた道筋に沿う力 F_s を、道筋に沿う距離 s に関して積分して得られた。積分の逆の演算は微分であったから、ある方向の力 F_s はポテンシャル関数 U をその方向に沿って微分したものに等しいことになる。

$$\text{ポテンシャル関数} \rightarrow \text{力} \quad F_s = -\frac{\partial U}{\partial s}. \tag{3.24}$$

微分を微妙にちがう記号 ∂ で書いたけれども、今の場合、普通の微分と違うわけではない。重力のポテンシャル・エネルギーが (3.23)

式のように書かれるとすると、働く力は $-d(mgy)/dy = -mg$ と求まり、重力が鉛直下向きに mg であることが確かめられる。

ポテンシャル関数 U は、モノがどのような力の場にあるかという具体的な状況に応じて、その関数形が異なる。同じ重力でも、地表面から離れたところを回っている人工衛星に対しては、mg というような近似形ではなく、正式に地球の中心からの距離 r の 2 乗に反比例する力 ($1/r^2$ の形) を考えなければならない。(3.24) 式を参考にすると、衛星や水素原子中の電子が受ける距離 r の 2 乗に反比例する力のポテンシャル関数は、r が無限遠方のときを基準値 0 として、$-1/r$ の形をしていることが知られる[3]。

力学的エネルギー保存の法則

運動エネルギーは運動方程式に基づいて力のする仕事量を計算し、ポテンシャル・エネルギーは具体的に力の形から仕事量を計算した。力がポテンシャル関数から出てきたものなら、両者は同一の仕事量を計算したのである。運動エネルギーの増え高はポテンシャル・エネルギーの減少分に等しく、逆もまた正しい。モノは外から仕事をされたときその仕事分だけエネルギーを増やし、自身のエネルギーを費やしてのみ外へ仕事をすることができるのだ。**力学的エネルギー保存の法則**である。

力が (3.24) 式によってポテンシャル関数 U から導かれる場合、そのような力を保存力と呼び、次の関係が成り立つ。

$$\frac{1}{2}m\,v'^2 + U' = \frac{1}{2}m\,v^2 + U = \text{一定}. \tag{3.25}$$

ここで、初めの速度 v とポテンシャル・エネルギー U が、ある出来事の結果終わりにはそれぞれ v'、U' に変化したと考えている。

---

[3]数学の教科書に $dx^n/dx = nx^{n-1}$ とあるから、$d(r^{-1})/dr = -r^{-2}$ である。それゆえ $1/r^2$ の積分は $-1/r$ となる。

エネルギーを勘定するとき距離について積分したから、この式には途中経過は表面に出ない。運動量保存則の場合と同様である。(3.25) 式は、「保存力の働く力学的な出来事は、運動エネルギーとポテンシャル・エネルギーの総和が保存するように起きる」ことを示している。2 つ以上のモノがあるときにも成立する。

高く上げられた重りはエネルギーをポテンシャル・エネルギー ($U = mgy$) としてもっていて、落ちていくとポテンシャル・エネルギーが減って、その分運動エネルギー ($\frac{1}{2}mv^2$) が増える。杭を打ち込む例では、その運動エネルギーを費やして仕事をするのである。ジェットコースターの場合には、初め機械で最高点まで引き上げられ、後はそのポテンシャル・エネルギーを使って動力なしで動いていく。ジェットコースターが斜面を下っていくほど運動エネルギー (速度) が増し、最も低い位置で最大の運動エネルギーとなり、坂を上がるときには次第に運動エネルギーをポテンシャル・エネルギーに変えていく。(3.25) 式から分かることは、ジェットコースターが初めの位置よりも高い位置まで上がることはできないということだ。

しかし、摩擦力など保存力でない力が働く場合には、力学的エネルギーは散逸してしまう。実際、ジェットコースターはレールをこすって摩擦熱を出しながら、きしみでレールや空気を振動させながら進む。つまり、ジェットコースターは他のモノへ仕事をしながら、言い換えると自分の力学的エネルギーを少しずつ失いながら進んでいる。惑星の公転運動では力学的エネルギーの散逸は小さいから、永い間運動の変化は見られない。彗星が太陽近くを速い速度で回っているときはポテンシャル・エネルギーが減って運動エネルギーを増加させ、太陽から遠いときは運動エネルギーが減ってポテンシャル・エネルギーが増加している。

3.4　力学法則の諸様相

あなたは力学をどのようにとらえているだろうか。そんなことをこの節では考えてみよう。ニュートンの運動の法則がヒトの視覚的観察によって発見された後、力学についての反省的な考察は、力学法則の抽象的ながら一般的な表現を発展させ、それは 20 世紀になって新しい法則の発見に寄与した。こうした発展やカオスの再認識などもあって、力学的自然観は大きく変容してきた。

カオス——多数のモノから成る系の運動の非決定性

近代科学の先頭を進んだ力学はその威力を発揮して、科学的な自然観の形成に大いに貢献した。諸科学の発展した 19 世紀においても、力学はその土台と見なされ、力学的 (機械論的) 自然観が支配的であった。ニュートンの運動方程式は、ある物体に働く力と質量が知られていて現在の状態 (初期条件) が分かれば、その物体が過去にどんな運動をしてきたか、未来にどんな運動をするかを言い当てる。それは「決定論」を後押しするようにみえる。世界の出来事は既に決まっている筋書きに従って起きる—という世界観へヒトを誘う。

この論の落とし穴は、たった 1 つの物体に対する運動方程式を広げすぎて言っているところにある。実は、運動方程式を手で (解析的に) 解けるのは 2 つの物体から成る系までである。3 つ以上の物体がある場合には解析的に解けない。1900 年頃、H. ポアンカレは 3 体問題にはとても複雑な解があることを発見した。たとえば 2 つの太陽をめぐる惑星は、われわれの知っている周期的な運動ではなく、異質の非周期的な運動をすることがある。彼は、このような運動が長期的に見れば予測不能であることに気

づいた。1 つ 1 つは決定論的な運動方程式に従うモノも、多数集まれば予測不可能な複雑な運動をすることがあるのだ。

1960 年代になると計算機の性能が上がり、数学的な解析解が得られない運動を数値的に計算して調べることができるようになって、この種の問題の研究が進んだ。自然の中に非周期的で予測不能な複雑な運動がたくさんある—ということが知られるようになった。それを**カオス**と呼ぶ。ただし、普通の意味の混沌と混同してはいけない。カオスとは、規則 (決定論的数式) に支配される不規則運動の呼び名である。カオス的運動では、初期状態のわずかな差が後の運動に巨大な差異をもたらす。カオスの運動を数値計算で追おうとすると、計算機は数値を有限な桁数でしか表現しないから、次々の計算で必ず計算誤差が発生する。その誤差はカオスでは致命的で、次々に本来の運動からはずれてついには巨大な差になる。また、現実にある状態を測定しようとしても、測定値には誤差がつきものである。真の初期条件を知ることができないのだから、カオス的運動の後の状態を予測することもできない。実験的に再現不能で、理論においても状態の推移を確定的に予言できないのだ。

世界が決定論的でないことに悲観してはいけない。カオスというのは、本質的に多数のモノの集合である自然にありふれたもので、人間の事象よりも複雑怪奇とは言えないことを見ておこう。橋の上から橋脚をめぐる水流を観察してみよう。水流がとてもゆるやかなら底が見えるほど滑らかだろう。少し速くなると橋脚の後ろに小さな渦ができる。運がよければ、その渦があるリズムのパターンを作りながら後方へ流れるだろう。流れが速くなると、そのパターンもくずれて乱雑になる。ついには、橋脚の後ろに渦と呼べるものが生まれず、まったく乱れた乱流になる。あとの 2

つのように、パターンの乱雑さや乱流がカオスである。あなたが見ている自然現象の中にたくさんのカオスがありそうだ。

変分原理

光が反射したり屈折したりして進む経路がどんなものかは反射や屈折の法則として習うが、17 世紀に P. フェルマーという人が「光は最短時間となる経路を進む」という別の表現を発見していた。この**フェルマーの原理** 1 つで、光の直進・反射・屈折をみな説明することができる。フェルマーの原理はこれら 3 つの法則をひとまとめにした法則なのだ。このように、ある物理的量が最小になるという要請が物理法則を導くとき、そのような法則の表現の仕方を**変分原理**という。変分という言葉は、ある関数が最小 (極小) になるところを求める、すなわち数学で極小点を求める操作のことを意味している。変分原理は、ある物理量の極小条件、簡単に言ってしまえば微分して 0 になるという形式で表現される。フェルマーの原理を具体的に書いてみよう。光が速さ c で距離 ds 進むとすれば、それにかかる時間は距離を速さで割って ds/c である。ある点から別の点まで進むのにかかる時間はそれらを足し算すればよい。例によってこの足し算を積分で表わせば $\int(1/c)\,ds$ だ。変分原理は微分して 0 という形で書かれるのだから、微分操作を δ という記号で表わして、フェルマーの原理は $\delta\int(1/c)\,ds = 0$ と書くことができる。

力学でも、法則が同じように変分原理で導かれることがしだいに明らかになった。複数の質点 (物体) から成る系が、力のバランスがとれて平衡な静止した状態にあるとしよう。この状態からそれぞれの質点を仮想的に動かしてみてその仕事量が負であったとすると、もっとエネルギーの小さい (低い) 状態があるということである。もしそうだとすると系はそちらの状態に移

行しようとするだろう。「平衡状態とはエネルギー最小の状態のはずだ」というのがこの場合の変分原理である。これを**仮想仕事 (仮想変位) の原理**と呼ぶ。$\boldsymbol{F}_i$ の力が働く i 番目の質点が微小な距離 ds_i ほど位置を変えたと考えてみよう。力 $\boldsymbol{F}_i$ の ds_i 方向の成分を F_i^s と表わすと、その仕事は (3.21) 式から $F_i^s ds_i$ である。この系の質点全部についての仮想仕事 δW は、和をとって $\delta W = \sum_i F_i^s ds_i$ となる。変分原理は、この仮想仕事が最小という条件、$\delta W = 0$ で与えられる。変分原理で取り上げられる仕事は、ベクトル量ではなく、方向を持たないスカラー量であることに注意しよう。フェルマーの原理でも、取り上げられたのは時間でやはりスカラー量であった。

フェルマーの原理に対応する力学の変分原理は、P. モーペルテュイによって提出された。**最小作用の原理**と呼ばれるもので、ニュートンの運動方程式を導き出すことができる。各瞬間の運動方向 ds に対してその方向の運動量を p と表わして、作用と呼ぶ量 $p\,ds$ を定義し、それを足し上げげた作用積分 $\int p\,ds$ が最小となるようにモノは運動する—という原理である。すなわち、$\delta \int^t p\,ds = 0$ と表現される。これを発展させて今では、力学の一般的な表現は解析力学と呼ばれる枠組みにまとめられ、力学の変分原理はハミルトンの原理として完成している (その話は後でしよう)。最小作用の原理は、エネルギー一定の運動についてハミルトンの原理と一致する。変分 (微分) して 0 になるのは最小点とは限らないから、変分原理は注目する物理量が極小となるという要請である。

後に、光の運動量 p は速度 c の逆数 $(1/c)$ に比例することが知られて、モノの運動についての最小作用の原理と光についてのフェルマーの原理が同根のものであることが判明した。異なる現象が同じ変分原理で説明されることになり、力学と光学の法則の

真理性を強めることになった。また、変分原理が自然法則の普遍的な数学的形式と考えられるようになった。

変分原理のイメージ

　抽象的で雲をつかむような話だととまどっているあなたのために、もう少し分かりやすい変分原理の例を見ておこう。仮想仕事の原理を切りつめて言えば、力学的なモノゴトはエネルギーが小さい (低い) 状態になろうとし、平衡状態に至ればエネルギーが最小になっているはずだ—という要請であった。力がポテンシャル関数 U から $F_s = -\partial U/\partial s$ で導かれるようなエネルギーの保存する力の場では、平衡点は $\delta U = 0$ のところである。つまりポテンシャル関数 U が極小値をとるところで平衡になるのである。たとえば、振り子は重りがもっとも下に来てポテンシャル・エネルギーが最小になるところで静止する。

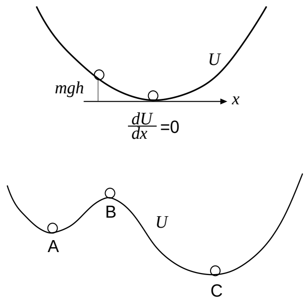

図 3.8: ポテンシャルの井戸の底 (極小点) 付近での運動.

　ポテンシャルの形までイメージするために、図 3.8 の上の図のような、どんぶりにビー玉を入れた場合を思い浮かべてみよう。地表付近では重力のポテンシャル・エネルギー (3.23) は深さに比例しているから、どんぶりの形はそのままポテンシャル関数 U の形を表わしている。どんぶりの斜面にあるビー玉は、そこで U の傾きが 0 でないので、底に向かう力が働いてころがり落ちていく。すると位置エネルギーが運動エネルギーに変わって速度を増すから、底に着いても静止しないでまたどんぶりの斜面を登っていく。しかし、摩擦によってしだいに力

学的エネルギーが失われるので、ビー玉はついには底で静止する。底では $\delta U = 0$、形自身からして極小の位置にある。ここがビー玉が安定して静止するところだ。ひるがえって、ビー玉が底にあるよりも余分のエネルギーをもっているときには、極小点である底のまわりを周回したり往復運動をしたりするのである。これがあなたの観察することだ。それを変分原理と結びつけて理解しておこう。

　もしどんぶりの代わりに図 3.8 の下の図のようなポテンシャルのくぼみがある運動だとすると、もっとも安定した平衡点はポテンシャル U の最小点 C のところである。ビー玉が底 C のあたりでいくらかの運動エネルギーをもってその付近を動く、というのがもっともありそうな状態である。B 点のように、曲面の頂上 (極大点) に物体を乗せると不安定なことは経験上分かる。だから、変分 $\delta U = 0$ が与える極値のうちで極小点が安定な平衡が得られるところだ。もっとくわしく見ると、図 3.8 下図では、A 点か C 点が局所的に安定なところだ。はじめ A 点付近で運動している状態で、もし B 点を越えるほどのエネルギーを一時的にでも得れば、状態は C 点側へ移る。化学反応で触媒の助けによって A から C の状態に移るのは、こういう仕方で理解できる。もっと一般的な変分原理の場合もこの例のように類推することにしよう。この見方は次章以降でもふり返るであろう。

解析力学

　モノゴトが時間・空間的な変化として起きるとき、その法則が変分原理によって表現できるであろうことを見てきた。その変分原理が適用される関数は、最小作用の原理で見たように、力学系に関する諸物理量からつくられる。この変分関数を、取扱い法を発展させた J. ラグランジュにちなんで、ラグランジュ関数 (**ラ**

グランジュアン) と呼ぶ。

ニュートンの運動方程式 $md^2x/dt^2 = F$ および $F = -\partial U/\partial x$ を導くラグランジュアン L は $L = \frac{1}{2}m\,\dot{x}^2 - U$ で与えられ、変分原理は $\delta \int Ldt = 0$ と書かれる。ここで、$\dot{x}$ は速さ dx/dt の省略表現で、U はポテンシャル関数である。変分原理 $\delta \int L\,dt = 0$ からニュートンの運動方程式が得られることが示せる。運動法則がこの変分原理で表現できるのである。

解析力学は、W.R. ハミルトンによってさらに発展させられた。ハミルトンは、ラグランジュアン L の代わりに、$H = p\,\dot{x} - L$ という関数を導入した。ここで、p は運動量、$\dot{x}$ は速さ dx/dt である。関数 H を**ハミルトニアン**と呼ぶ。ハミルトニアン H を用いると、変分原理は $\delta \int (p\,\dot{x} - H)\,dt = 0$ と表わされる。3 次元空間で多粒子系の運動を考える場合には、運動量と位置座標に添え字 i を付け、和をとって一般化すればよい。この**ハミルトンの原理**は、ハミルトニアン H に関する正準方程式と呼ばれる方程式を導く。その正準方程式が解析力学の運動方程式である。ニュートンの運動方程式は位置座標を時間で 2 度微分したものであったが、ハミルトンの正準方程式は運動量と位置座標を時間で 1 度だけ微分したもので、代わりに 2 倍の数の方程式が得られる。

上の $\dot{x}$ は速さ v のことで、p は運動量 $m\,v$ のことであったから、$m\,\dot{x}^2$ と $p\,\dot{x}$ は $m\,v^2$ あるいは p^2/m と表わせる。そこで、ハミルトニアン H を書きなおしてみると、次のようになる。

$$\text{ハミルトニアン}\quad H = \frac{1}{2m}p^2 + U.$$

第 1 項は $\frac{1}{2}m\,v^2$ とも書けるから、ハミルトニアン H は、運動エネルギーとポテンシャル・エネルギーの和であり、力がポテンシャル関数から導かれる場合力学系の全エネルギーを意味する。

ハミルトニアンで運動を記述する方法がたいへん有効なことを、第 9 章の量子力学のところで見るだろう。

その後の力学法則の展開

カオスの発見は、ニュートンの運動方程式を柱とする力学法則を否定したわけではない。物理学上の真の変革は 20 世紀最初の四半世紀に起こった。相対性理論と量子力学の発見である。それまであらゆる運動がそれに則っていると考えられてきた力学法則には、限界があることが判明した。そのことは第 8 章と第 9 章で話す。この進展において、一般化された解析力学は有益な方法を提供した。現代物理学でも、物理系を考えるのにラグランジュアン L やハミルトニアン H を設定して出発することが行われている。

ニュートン力学は全否定されて守備範囲を失ったのではない。ニュートン力学は、理論的には相対性理論や量子力学の近似的な法則という地位にあるが、ヒトが地上で自分の眼で見るほとんどすべての運動を説明し、工学的にも現役の有用な法則である。守備範囲が限定され、宇宙規模の出来事や分子以下の微視的出来事の説明を、相対性理論と量子力学に明け渡したのだ。守備範囲という見方で言えば、単純ではないが物質の階層構造と自然法則のあいだに対応関係があると言える。

あなたは物理法則が真理であるということを何によって確信しているだろうか。ニュートン力学は相対性理論や量子力学の近似的な法則ということになったのだけれども、それらは連関をもっていて光学とも変分原理で結びついていて、物理学の体系全体が密接に結びついてさまざまな現象を説明することができるのである。それはしだいにゆるぎないものに近づいて来たと言うことができるだろう。